ارزیابی کفایت و نیاز به اندازه گام زمانی رایج پیشنهاد شده برای تحلیل دینامیکی غیرخطی

آرام سروشیان
استادیار پژوهشکده مهندسی سازه a.soroushian@iiees.ac.ir

رفتار واقعی سیستم‌های سازه‌ای در برابر زلزله‌های بخصوص قوی دینامیکی و غیرخطی است. تحلیل تاریخچه زمانی با استفاده از یکی از روش‌های انتگرالگیری مستقیم گام به گام و یکی از روش‌های حل تکراری غیرخطی توانمندترین روش بررسی مسائل مقدار اولیه متناظر رفتار دینامیک سازه غیرخطی بخصوص در حالتی است که بار دینامیکی خارجی ناشی از زلزله باشد. رابطه حاکم بر رفتار دینامیکی غیرخطی سیستم‌های سازه‌ای تحت اثر زلزله را، پس جداسازی مدل پیوسته با استفاده از روش‌هایی مثل اجزاء محدود، اجزاء مرزی . . . ، می‌توان به شکل زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_{\text{int}} = \mathbf{f}\,(t) \qquad 0 \le t < t_{\text{end}} \\ &\mathbf{u}\,(t=0) = \mathbf{u}_0 \\ &\dot{\mathbf{u}}\,(t=0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \\ &\mathbf{f}_{\text{int}}\,(t=0) = \mathbf{f}_{\text{int}_0} \\ &\mathbf{Q} \le \overline{\mathbf{O}} \end{aligned} \tag{۱}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{M}$ ماتریس جرم سیستم چند درجه آزاد، $\mathbf{u}$ بردار تغییرمکان‌های درجات آزاد مختلف سیستمَ چند درجه آزاد، هر نقطه بالای یک متغیر نشان‌دهنده یک بار مشتق‌گیری از آن متغیر نسبت به زمان، $\mathbf{f}_{\text{int}}$ بردار نیروهای داخلی اعضای سیستم سازه ای چند درجه آزاد، $\mathbf{f}(t)$ بردار نیروهای دینامیکی وارده از خارج از سیستم سازه ای بر درجات آزاد سیستم چند درجه آزاد، علامت 0 به عنوان زیرنویس سمت راست یک متغیر به مفهوم اولیه بودن زمانی متغیر دارای زیرنویس، t بیانگر متغیر زمان، و نهایتاً، t_{end} مؤید طول زمانی بررسی رفتار دینامیکی است. انتگرالگیری مستقیم گام به گام، به همراه اعمال روش تکراری غیرخطی (در موارد لازم)، کارآمدترین طریقه حل مسأله بیان شده طی رابطه (۱) است. گام زمانی تحلیل یا Δt، پارامتری با بیشترین تأثیر بر ویژگی‌های مختلف تحلیل بخصوص دقت پاسخ‌ها و زمان تحلیل است.

پیشنهاد مورد اقبال عمومی برای انتخاب مقداری مناسب برای Δt به صورت زیر است:

$$\Delta t = \text{Min}\left(\Delta t_{\text{cr}}, \frac{T}{\chi}, {}_f\Delta t\right)$$

$$\chi = \begin{cases} 10 & \\ 100 & \text{وقتی رفتار غیرخطی است ولی برخوردی وجود ندارد} \\ 1000 & \text{وقتی رفتار غیرخطی است برخورد هم وجود دارد} \end{cases} \tag{۲}$$

که در آن، Δt_{cr} حد بالای گام انتگرالگیری برای حفظ پایداری (و حتی سازگاری) عددی، T کوچکترین پریود حائز اهمیت در تاریخچه زمانی پاسخ هدف، و ${}_f\Delta t$ گام زمانی عددی شدن زلزله است.

طی بررسی عددی و نظری انجام شده و توجه به مشاهدات عددی

Assessment of the Sufficiency and Necessity of the Conventionally Accepted Proposed Time Step for Nonlinear Structural Dynamic Analysis

Aram Soroushian
Assistant Professor, Structural Engineering Research Center
a.soroushian@iiees.ac.ir

The actual behavior of structural systems subjected to severe earthquakes is dynamic and nonlinear. Time history analysis using a step-by-step direct time integration method and an iterative method for nonlinear solution is the most powerful method to analyze the initial value problems defining the dynamic nonlinear behavior of structural systems, especially when the external load is because of a severe earthquake. After discretization in space by methods such as finite or boundary elements, the ordinary initial value problem defining the above-mentioned nonlinear dynamic behavior can be expressed as:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_{\text{int}} = \mathbf{f}\,(t) \qquad 0 \le t < t_{\text{end}} \\ &\mathbf{u}\,(t=0) = \mathbf{u}_0 \\ &\dot{\mathbf{u}}\,(t=0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \\ &\mathbf{f}_{\text{int}}\,(t=0) = \mathbf{f}_{\text{int}_0} \\ &\mathbf{Q} \le \overline{\mathbf{O}} \end{aligned} \tag{1}$$

In Eq. (1), $\mathbf{M}$ is the mass matrix, $\mathbf{u}$ is the vector of unknown displacements, $\mathbf{f}_{\text{int}}$ is the vector of unknown internal forces, $\mathbf{f}(t)$ is the vector of external forces, t implies the independent variable (time), t_{end} is the time duration of the dynamic behavior, each top dot implies once differentiation with respect to time, and '0' as a right subscript implies that the argument is at its initial condition, i.e. the status at $t=0$. As implied above, together with an iterative method for nonlinear solution, time integration defines the most versatile approach for analyzing Eq. (1), and the parameter with most effectiveness on the results of this analysis, especially on the accuracy of the response, the analysis run-time, and the computational effort, is the integration step. The broadly accepted relation suggesting a value for the integration step is as follows:

$$\Delta t = \text{Min}\left(\Delta t_{\text{cr}}, \frac{T}{\chi}, {}_f\Delta t\right)$$

$$\chi = \begin{cases} 10 & \text{When the behavior is linear} \\ 100 & \text{When the behavior is nonlinear but not involved in impact} \\ 1000 & \text{When the behavior is nonlinear and involved in impact} \end{cases} \tag{2}$$

where, Δt_{cr} is the upper-bound to preserve numerical stability, as well as consistency, T is the smallest period with notable contribution in the target response, and $_f\Delta t$ implies the step at which the external forces (the $\mathbf{f}(t)$ in Eq. (1)) is digitized.

This study has shown through various numerical tests, that the results of Eq. (2) can be insufficient and unnecessary for the accuracy of the target response. The numerical observations are compared with the scattered data reported in the literature. In view of the consistency between the tests and the existing data, the phenomenon is studied theoretically and its reason is explained. In brief, though the main parameter affecting the results of analysis of Eq. (1) is the integration step, for nonlinear analyses, there are other contributors, with considerable effects, as well; e.g. the tolerance of nonlinear iterations.

The consequence of studying the existing nonlinearity using an iterative nonlinear solution method is nonlinearity residuals at the integration stations where nonlinearity is detected. This is regardless, of using implicit/explicit, single-/multi-step, single-/multi-stage unconditionally/conditionally stable . . . integration method, the method used for nonlinear solution, and the tolerance of the iterative nonlinear solution. Therefore, at the steps after the detection of nonlinearity, the computed response is under the influence of the problem's actual parameters, the characteristic of the time integration specifically the integration step, and also the nonlinearity residual at the last step. As a result, Eq. (2) cannot be correct because of not considering all the influencers in the accuracy of the response. The incorrectness can appear as insufficiency or lack of necessity of the integration step for the accuracy of the target response. The reason is the fact that the two sources of error originated in time integration and iterative nonlinear solution are independent. Still, for problems with the nonlinearity of the piece-wisely linear type, when the time step is sufficiently small, the effect of the residuals disappear, and more accuracy is obtainable for the target response, when using smaller integration steps. The "sufficiently small" in the previous sentence however depends on the problem and potentially even on the integration method.

Considering the explanation above, a good way to use Eq. (2) for assigning an appropriate value to Δt is to pay attention to the comments in structural dynamics and numerical analysis of ordinary initial value problems, regarding repetition of the analyses with smaller steps, and comparing the computed responses till convergence of the responses. This is somehow materialized in the analysis procedure presented for nonlinear response history analysis in the seismic code of New Zealand, NZS 1170.5:2004. The procedure can to some extent guarantee the sufficiency, but cannot guarantee the necessity, of the integration step, for the response accuracy. This can be explained on the basis

متفرق گزارش شده در ادبیات فنی، گام زمانی پیشنهاد شده در رابطه (۲) از نظر برقراری دقت، برای پاسخ‌های هدف مورد نظر از تحلیل تاریخچه زمانی، کافی نیست، و حداقل برای بسیاری از روش‌های انتگرالگیری مثال‌هایی قابل تبیین بوده بعضاً در گزارش این پروژه و یا ادبیات فنی آمده است که تحلیل با گام‌هایی که رابطه (۲) را ارضا می‌کنند منجر به پاسخ‌هایی غلط درحد ناپایداری عددی شده است. حالت‌های برعکس نیز که رابطه (۲) منجر به گام‌هایی بسیار کوچکتر از حد لازم برای دقت و لذا صرف زمان و هزینه محاسباتی بیش از مقدار لازم است نیز قابل تصور و تعریف بوده ارائه شده است.

از عمده‌ترین دلایل منجر به این دو پدیده، یعنی عدم کفایت یا عدم لزوم گام زمانی حاصل از رابطه (۲)، در نظر گرفته نشدن صحیح رفتار غیرخطی و جزئیات پارامترهای تحلیل تکراری غیرخطی در تعیین اندازه گام زمانی انتگرالگیری است. به طور خلاصه و در عمل، خطاهای بازمانده در گام‌های درگیر با رفتار غیرخطی دارای تأثیری بر دقت محاسبات منجر به پاسخ مسأله است که در رابطه (۲) کلاً دیده نشده است. به عنوان قاعده‌ای کلی، بخصوص در مسائل با رفتار غیرخطی از نوع تکه تکه خطی، هر چه اندازه گام انتگرالگیری کوچکتر باشد، تاثیر دیگر عوامل بر ویژگی‌های پاسخ و تحلیل کاهش می‌یابد، و نهایتاً به ازای مقادیر به میزان کافی کوچک گام انتگرال‌گیری این تأثیرها قابل صرفنظر هستند (مقادیر به میزان کافی کوچک در مسائل مختلف متفاوت است).

بهترین نحوه استفاده از رابطه (۲) برای انتخاب گام زمانی تحلیل تاریخچه زمانی غیرخطی، توجه به پیشنهادهای متعدد موجود در مراجع دینامیک سازه و حل عددی مسائل مقدار اولیه، مبتنی بر تکرار محاسبات انتگرالگیری گام به گام مستقیم با گام‌های کوچکتر تا همگرایی پاسخ‌ها، و نهایتاً استفاده از روند ارائه شده در آیین‌نامه لرزه‌ای کشور نیوزیلند (NZS 1170.5:2004) است، که تا اندازه‌ای، کفایت و نه لزوم پیشنهاد انتخاب گام زمانی را برای دقت پاسخ‌ها تضمین می‌کند. با توجه به اهمیت تحلیل تاریخچه زمانی غیرخطی در مهندسی سازه و زلزله و بسیاری رشته‌های دیگر علوم و مهندسی نتایج این تحقیق حائز اهمیت بالایی است، و لذا پیشنهادهای مختلفی برای ادامه تحقیق بخصوص به سمت ضوابطی مناسب‌تر برای انتخاب گام تحلیل در استانداردهای لرزه‌ای مطرح شده است.

کلمات کلیدی: تحلیل تاریخچه زمانی غیرخطی، دقت پاسخ هدف، سرعت محاسبات، انتگرالگیری مستقیم گام به گام، تحلیل تکراری غیرخطی، استاندارد لرزه‌ای کشور نیوزیلند

of convergence of responses obtained from analyses carried out with sufficiently small steps, and the ending steps of the analysis procedure presented in NZS 1170.5:2004.

In view of the importance of response history analysis in structural engineering, earthquake engineering, and many other fields, and that time integration is the only versatile method for analyzing nonlinear dynamic behaviors, the results of this research are very important. Several suggestions have therefore been made to continue the research, especially towards more appropriate step selection criteria in seismic regulations.

Keywords: Nonlinear response history analysis, Accuracy of the target response, Analysis speed, Step-by-step direct time integration, Seismic code of New Zealand