حل تحلیلی مسأله الاستودینامیک نیم‌فضای سه‌بعدی در گستره زمان با تابع گرین

محسن کمالیان
استاد پژوهشکده مهندسی ژئوتکنیک kamalian@iiees.ac.ir

مریم عرفانی‌نیا، مهدی پنجی، عبدالله سهرابی بیدار

یکی از پدیده‌های مهم فیزیک در جهان هستی، انتشار موج در محیط‌های پیوسته است. پدیده‌ای که بیان ریاضی آن در علم مهندسی عمران، برای محیط‌های ارتجاعی خطی، در قالب مسائل الاستودینامیک بیان می‌گردد. به عنوان نمونه، تحلیل پاسخ زمین، در اثر انتشار امواج لرزه‌ای ناشی از رخداد گسلش، با استفاده از فرضیات ساده‌کننده، در این شاخه از علم مهندسی دنبال می‌شود. یکی از روش‌های عددی کارآمد در حل مسأله انتشار امواج در محیط‌های با رفتار خطی و دامنه بی‌نهایت، روش اجزاء مرزی است. مقبولیت روش مذکور در مقایسه با روش‌هایی نظیر اجزاء محدود، اقناع شرط تشعشع، در مسیر حل معادلات حاکم و محدود شدن تقسیم‌بندی تنها به مرزهای مسأله است. استفاده از روش اجزاء مرزی نیازمند داشتن پاسخ اساسی یا تابع گرین نظیر معادله دیفرانسیل حاکم است. در صورتی که از پاسخ اساسی برای حل عددی مسأله الاستودینامیک محیط با دامنه نیم‌بی‌نهایت به روش اجزاء مرزی استفاده می‌شود، باید مرز افقی مسأله اصلی تا فواصل دور از محل وارد آمدن بار یا عوارض توپوگرافی تقسیم‌بندی شود که منجر به افزایش هزینه محاسبات می‌گردد. حال اگر به جای پاسخ اساسی از تابع گرین استفاده شود، به دلیل اقناع شرایط مرزیِ مسأله توسط توابع گرین، میزان تقسیم‌بندی محیط کاهش و دقت پاسخ‌ها افزایش و حجم محاسبات به دلیل محدودیت مرزهای تقسیم‌بندی شده کاهش می‌یابد.

استخراج تابع گرین برای حل عددی مسائل مختلف در حوزه علوم مهندسی، یکی از زمینه‌های تحقیقاتی است که به دلیل تلاش برای یافتن پاسخ تحلیلی معادلات دیفرانسیل حاکم بر محیط، در ردیف مطالعات بنیادی گنجانده می‌شود. تحقیق حاضر، پاسخی تحلیلی برای تابع گرین محیط نیم‌بی‌نهایت در فضای سه بعدی مکان و در گستره زمان، برای معادله الاستودینامیک حاکم بر محیط همگن، همسان و ارتجاعی خطی ارائه داده است. اساس حل بر روش منبع موج مجازی و رویکرد ماینداین۳ مبتنی است. بدین منظور از جمع پاسخ حل اساسی تمام‌فضا و همچنین پاسخ نیم‌فضا به بارهای اعمالی به سطح نیم‌فضا استفاده شده است. پاسخ حل اساسی تمام‌فضا، حل مسأله الاستودینامیک را برای محیط همگن سه‌بعدی دارای رفتار ارتجاعی خطی و پیکره بی‌نهایت شامل می‌شود که توسط ضربه واحد متمرکز درون‌محیطی بارگذاری شده است. این مسأله به استوکس شهرت دارد. استخراج پاسخ اساسی تمام‌فضا، با بکارگیری تابع پتانسیل لامه (که بر مبنای تجزیه استوکس هلمهولتز بدست آمده است) در معادله ناویه و تبدیل آن به دو معادله موج اسکالر و برداری، صورت می‌پذیرد. با حل معادلات موج و یافتن توابع موج اسکالر و برداری، پاسخ حل اساسی تمام‌فضا حاصل می‌شود. یافتن پاسخ نیم‌فضا به بارهای اعمالی به سطح نیم‌فضا، حل مسأله الاستودینامیک را برای محیط همگن

Transient Analysis of 3D Elasto-dynamic Problems by Half-space Green's Functions

Mohsen Kamalian
Professor, Geotechnical Engineering Research Center
kamalian@iiees.ac.ir

Maryam Erfaninia, Mehdi Panji, Abdollah Sohrabi Bidar

One of the important phenomena in the world of physics is wave propagation in continuous media. The mathematical expression of this phenomenon is discussed in the field of materials engineering for linear elastic media in the form of elastodynamic problems. For instance, the analysis of the earth's response due to seismic wave propagation caused by a fault event is pursued in this branch of engineering using simplifying assumptions. One effective method for solving the problem of wave propagation in linearly behaving media with an infinite domain is the boundary element method. The popularity of this method compared to other methods such as finite element methods is due to its confinement of the problem's division to the boundaries only in the process of solving governing equations. Using the boundary element method requires the fundamental solution or Green's function of the governing differential equation. If the fundamental solution is used for numerically solving the elastodynamic problem of a media with a semi-infinite domain using the boundary element method, the problem's horizontal boundary must be divided up to far distances from the point of load application or topographic features, leading to increased computational cost. However, if the Green's function is used instead of the fundamental solution, the environment's partitioning decreases, and the accuracy of the solutions increases due to the satisfaction of the boundary conditions of the problem by Green's functions. Moreover, the computational volume is reduced due to the decreased divided boundaries.

Providing the Green's function for various problems in the field of engineering and materials science is one of the research areas that is included in the fundamental studies due to the efforts to find analytical solutions to the differential equations governing the environment. This thesis provides an analytical solution for the Green's function of the infinite half-space environment in three-dimensional space and in the time domain, for the homogeneous, isotropic, and linear elasticity equation. The basis of the solution is based on the source image as well as the Mindlin approach. To this end, the summation of the solution of the fundamental problem of the full-space as well as the solution of the half-space to

سه‌بعدی دارای رفتار ارتجاعی خطی و پیکره نیم‌بی‌نهایت شامل می‌شود که توسط بارهای تابع زمان از نوع هویساید و دلتای دیراک بارگذارش شده است.. مسأله مذکور به مسأله لمب شهرت دارد. به منظور حل مسأله اخیر، مانند روش استخراج پاسخ اساسی تمام‌فضا، از تابع پتانسیل لامه استفاده و معادله حاکم به دو معادله موج تبدیل شد. با اعمال تبدیل لاپلاس بر معادله‌های موج و استفاده از تبدیل هنکل در شرایط مرزی مسأله، پاسخ در فضای انتقالی لاپلاس نسبت به پارامتر زمان به دست آمد. برای حصول پاسخ در فضای زمان، از روش اصلاح شده Cagniard-Pekeris استفاده گردید. بدین ترتیب و در نهایت، با بکارگیری رویکرد مایندلین، تابع گرین مورد نظر استخراج شد.

۱- تحقیق حاضر، پاسخ تحلیلی محیط نیم‌فضا را برای موقعیت‌های مختلف قرارگیری منبع و گیرنده موج، استخراج و ارائه کرد. پاسخ‌های یادشده، تغییرمکان قائم و افقی داخل و روی سطح را برای بارگذاری دینامیکی رو و داخل سطح محیط شامل می‌شود. تابع گرین استخراج شده، تاکنون برای مسائل الاستودینامیک سه‌بعدی برآورد نشده بود.

۲- کاربرد مهم تابع گرین استخراج شده، حل عددی مسأله انتشار موج در محیط سه‌بعدی الاستودینامیک خطی دارای دامنه نیم‌بی‌نهایت، در گستره زمان، خصوصاً با روش اجزاء مرزی است. کاربرد این توابع در روش اجزاء مرزی، حل ساده‌تر، سریع‌تر و دقیق‌تر رفتار لرزه‌ای اراضی دارای توپوگرافی رو یا زیرسطحی را امکان‌پذیر می‌سازد.

۳- اعتبارسنجی توابع گرین استخراج شده، با محاسبه تغییرمکان سطح نیم‌فضا به بارگذاری دینامیکی وارد بر سطح محیطی معین، تغییرمکان نقاط داخل همان محیط در اثر بارگذاری دینامیکی وارد بر سطح و بالأخره تغییرمکان سطح نیم‌فضا به بارگذاری دینامیکی اعمال شده در داخل آن محیط، انجام شده است. مقایسه نتایج حاصله با نتایج ثبت شده در ادبیات فنی از انطباق کامل پاسخ‌ها با یکدیگر حکایت داشت. برخی نتایج بدست آمده در اشکال زیر نمایش داده شده است:

الف- شکل (۱) تغییرمکان قائم درون نیم‌فضا را در برابر بار قائم هویساید متمرکز وارده بر سطح دارای ضریب پواسون ۰/۲۵ نشان داده است. دو موقعیت متفاوت برای قرارگیری گیرنده در نظر گرفته شده است. نتایج حاصله بر نتایج ارائه شده توسط جانسون (۱۹۷۴) کاملاً منطبق است.

ب- شکل (۲) تاریخچه زمانی تغییرمکان قائم و شعاعی سطح نیم‌فضا را تحت تأثیر بار قائم هویساید متمرکز ارائه کرده است. نسبت موقعیت قرارگیری منبع به گیرنده موج ($\frac{z}{r}=0.5$) برابر با ۰/۵ فرض شده است.

نتایج برای ضرائب پواسون دارای مقادیر $0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ نمایش داده شده است. نتایج بدست آمده بر نتایج ارائه شده توسط امامی و اسکندری قادی (۲۰۱۹) کاملاً منطبق است.

واژه‌های کلیدی: تابع گرین الاستودینامیک سه‌بعدی، روش اجزاء مرزی، نیم‌فضا، تبدیل لاپلاس، تبدیل هنکل، رویکرد مایندلین، حوزه زمان

the applied loads on the surface of the half-space have been used. The fundamental solution of the problem includes solving the elastodynamic problem for the homogeneous three-dimensional environment with linear elastic behavior, which has an infinite domain and is subject to a unit impact within the environment. This problem is famous as the Stokes problem. The basis of the solution method is based on the use of the Lamé potential function (obtained based on the decomposition of the Stokes-Helmholtz equation) in the Navier equation and its transformation into two scalar and vector wave equations. By solving the wave equations and finding the scalar and vector wave functions, the fundamental solution of the problem was obtained. Finding the solution of the half-space to the applied loads on the surface of the half-space includes solving the elastodynamic problem for the homogeneous three-dimensional environment with linear elastic behavior, which has a semi-infinite domain and is subject to loads of time-dependent functions that vary with time as Heaviside step, Dirac delta and derivatives of Dirac delta functions. This problem is famous as the Lamb problem. To solve this problem, similar to the method of solving the fundamental solution of the full-space, the governing equation was transformed into two wave equations using the Lamé potential function. By applying the Laplace transform to the wave equations and using the Hankel transform in the boundary conditions of the problem, the solution in the Laplace transmission space with respect to the time parameter was obtained. In order to obtain the solution in the time domain, the modified Cagniard-Pekeris method was used. Thus, using the Mindlin approach, the Green's function was obtained.

1- The present research extracted and presented the analytical response of the half-space for different positions of the wave source and receiver. The mentioned responses include vertical and horizontal displacements inside and on the surface for dynamic loading on and inside the surface of the environment. The derived Green's functions have not been estimated for 3D elastodynamics problems so far.

2- An important application of the derived Green's functions is the numerical solution of the wave propagation problem in a three-dimensional linear elastodynamic medium with a semi-infinite domain, in the time domain, especially with the boundary element method. The application of these Green's functions in the boundary element method enables a simpler, faster and more accurate site response analysis of grounds with surface or subsurface topography.

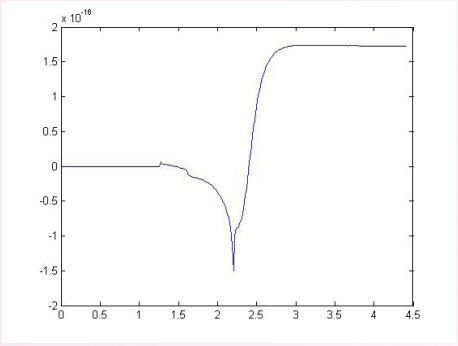
3- The derived Green's functions has been validated by calculating the displacement of the half-space ground

surface due to a dynamic loading applied at a given surface, the displacements beneath the ground surface due to a dynamic loading applied at the ground surface, and finally the displacements along of the half-space ground surface due to the dynamic loading applied beneath the ground surface. Comparison of the calculated results with those reported in the technical literature indicates an excellent agreement between them. Some of the obtained results are demonstrated in the following pictures:

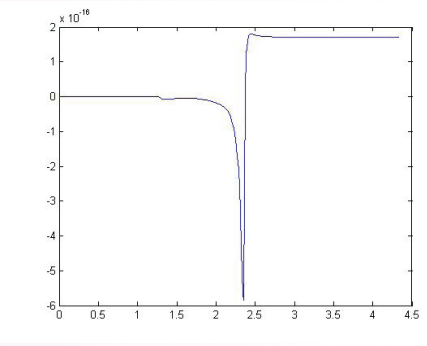
a- Figure (1) shows the vertical displacement beneath the half-space ground surface due to a vertical Heaviside-type concentrated load on the ground surface. The Poisson's ratio of the medium is 0/25. Two distinct positions were considered for the placement of the receiver. As can be seen, comparison of the calculated results with those presented by Johnson (1974) indicates a perfect agreement.

b- Figure (2) presents the time histories of the vertical and radial displacement of the half-space ground surface due to the vertical Heaviside-type concentrated load beneath the ground surface. The ratio of the source to the receiver's location ($\frac{z}{r}$) was assumed to be 0/5. Different values for the Poisson's Ration were considered. As can be seen, the calculated results are completely consistent with the results presented by Emami and Eskandari Qadi (2019).

Keywords: Green functions, Three-dimensional electro-dynamics, Laplace transform, Hankel transform, Mindlin approach, Time domain



b)

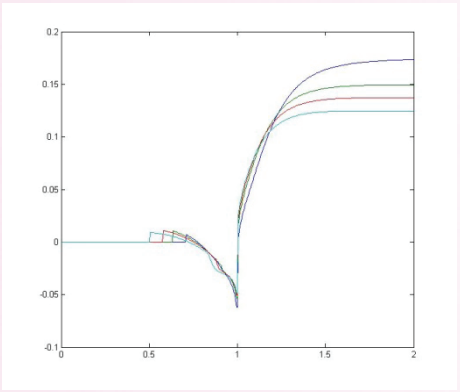


a)

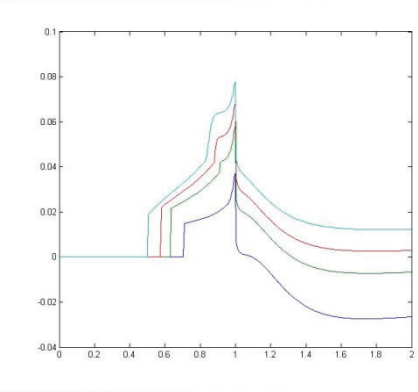
شکل (۱): تاریخچه زمانی پاسخ تغییرمکان قایم درون نیم‌فضا به بار قائم متمرکز وارد بر سطح از نوع تابع هویساید، برای ضریب پواسون برابر با ۰/۲۵

a) $x_1 = 0\,m,\ x_2 = 0\,m,\ x_3 = 200\,m$ و $\xi_1 = 10000\,m,\ \xi_2 = 0\,m,\ \xi_3 = 0m$

b) $x_1 = 0\,m,\ x_2 = 0\,m,\ x_3 = 2000\,m$ و $\xi_1 = 10000\,m,\ \xi_2 = 0\,m,\ \xi_3 = 0m$



a)



b)

شکل (۲): تاریخچه زمانی پاسخ تغییرمکان سطح نیم‌فضا به بار قائم متمرکزِ داخلی از نوع تابع هویساید ($\frac{z}{r} = 0.5$)، برای مقادیر مختلف ضریب پواسون برابر با $0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$، a) تغییرمکان شعاع b) تغییرمکان قائم